

MATEMATICKÉ PRAKTIKUM

**Sbírka řešených příkladů z matematiky
pro studenty vysokých škol**

Miloš Kaňka



Vědecký redaktor: prof. RNDr. Josef Matušů, DrSc.

Miloš Kaňka

Matematické praktikum

Sbírka řešených příkladů z matematiky
pro studenty vysokých škol

Vydání I. – 2010

Vydalo nakladatelství Ekopress, s. r. o., K Mostu 124, Praha 4

Obálka: Karel Novák

Tisk: xPrint, s. r. o.

www.ekopress.cz

This book was typeset by \LaTeX the macro system of the American Mathematical Society.

© doc. RNDr. Miloš Kaňka, CSc., 2010

© Ekopress, s. r. o., 2010

ISBN 978-80-86929-65-1

Obsah

Úvod	7
1 Množiny, logika, zobrazení, reálné funkce jedné reálné proměnné, inverzní funkce	9
1.1 Množiny a logika	9
1.2 Základní číselné množiny	12
1.3 Zobrazení	14
1.4 Reálné funkce jedné reálné proměnné, elementární funkce, inverzní funkce	15
2 Limita posloupnosti a funkce, spojitost funkce	39
2.1 Limita posloupnosti	39
2.2 Limita funkce	50
2.3 Spojitost funkce	65
3 Úvod do diferenciálního počtu reálných funkcí jedné reálné proměnné	69
3.1 Derivace funkce v bodě	69
3.2 Vztah mezi derivací a spojitostí funkce v bodě	72
3.3 Derivace funkce v intervalu	74
3.4 Přehled základních vzorců pro výpočet derivací	77
3.5 Derivace algebraických operací	78
3.6 Derivace složené funkce	80
3.7 Derivace vyšších řádů	86
3.8 Diferenciál funkce	88
3.9 Výpočet limit, l'Hospitalovo pravidlo	90
3.10 Význam první derivace pro průběh funkce	97
3.11 Lokální extrém	102
3.12 Absolutní extrém	106
3.13 Význam druhé derivace pro průběh funkce, funkce konkávní a konvexní, inflexní body funkcí	110
3.14 Průběh funkce	116
3.15 Taylorův polynom	137
4 Úvod do diferenciálního počtu reálných funkcí dvou reálných proměnných	155
4.1 Úvodní poznámky	155

4.2	Množiny v \mathbb{R}^2	157
4.3	Definiční obory reálných funkcí dvou reálných proměnných	161
4.4	Limita posloupnosti v \mathbb{R}^2	165
4.5	Limita funkce	166
4.6	Spojitosť funkce	167
4.7	Parciální derivace prvního a druhého řádu	168
4.8	Hladké funkce	172
4.9	Lokální extrémy funkcí dvou proměnných	174
4.10	Vázané extrémy funkcí dvou proměnných	183
5	Integrály	191
5.1	Primitivní funkce, neurčitý integrál	191
5.2	Integrály jednoduchých typů racionálních funkcí, kde v čitateli je polynom nejvýše prvního stupně a ve jmenovateli je polynom druhého stupně	207
5.3	Určitý integrál	215
5.4	Nevlastní integrály	220
5.5	Geometrická interpretace určitého integrálu	223
6	Nekonečné řady	227
6.1	Nekonečné řady reálných čísel, základní pojmy	227
6.2	Geometrické řady	230
6.3	Řady s nezápornými členy	235
6.4	Řady s kladnými členy	238
6.5	Alternující řady	247
6.6	Absolutně konvergentní řady	248
6.7	Mocninné řady	249
7	Diferenciální rovnice prvního řádu, lineární diferenciální rovnice prvního a druhého řádu s konstantními koeficienty	255
7.1	Diferenciální rovnice prvního řádu, separace proměnných	255
7.2	Homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty	260
7.3	Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty	261
7.4	Lineární diferenciální rovnice prvního řádu se speciální pravou stranou	265
7.5	Lineární diferenciální rovnice druhého řádu se speciální pravou stranou	269
	Seznam literatury	283

Úvod

Matematické praktikum je sbírka řešených příkladů určená pro studenty prvních ročníků vysokých škol. Tato publikace neobsahuje kapitulu o lineární algebře, neboť na některých vysokých školách je lineární algebra vyučována odděleně od tzv. základního kurzu matematiky. Zmíněné kurzy se zpravidla zabývají úvodem do základů matematické analýzy. V tomto smyslu je tedy koncipována sbírka řešených příkladů, nazvaná Matematické praktikum, která vedle řešených příkladů obsahuje také příklady neřešené s výsledky.

Příkladový materiál, sloužící k ilustraci základních pojmů, resp. základních početních postupů, byl vybrán tak, aby byl pro studenty přijatelný, jak z hlediska věcné obtížnosti, tak z hlediska početní složitosti.

Ve srovnání s předchozí publikací – Sbírkou řešených příkladů z matematiky – obsahuje Matematické praktikum navíc podkapitulu Taylorův polynom a kapitulu Nekonečné řady (rozumí se číselné).

První kapitola obsahuje látku, která je do jisté míry vyučována na středních školách, nicméně obsahuje i partie, které ve středoškolských programech s velkou pravděpodobností nejsou. K takovým patří část zabývající se číselnými množinami. Je důležité si hned na začátku uvědomit rozdíl mezi množinou reálných čísel označovanou symbolem \mathbb{R} a množinou zobecněných reálných čísel označovanou symbolem \mathbb{R}^* .

První kapitola dále obsahuje opakování stěžejních pojmů, jako zobrazení, reálná funkce a reálná funkce jedné reálné proměnné, elementární funkce. Rovněž je v první kapitole obsažena partie věnovaná konstrukci inverzních funkcí k některým základním elementárním funkcím.

Druhá kapitola je věnována ilustraci pojmů: limita posloupnosti, limita funkce a spojitost funkce a základních početních postupů s těmito pojmy spojenými. Pochopení těchto pojmů hraje klíčovou roli v pochopení celého dalšího textu.

Třetí kapitola je věnována klasickým otázkám diferenciálního počtu jedné reálné proměnné. Poslední podkapitola třetí kapitoly je věnována konstrukci Taylorových polynomů a otázkám přesnosti aproximace funkce Taylorovým polynomem.

Čtvrtá kapitola obsahuje velmi stručný přehled základních pojmů a početních metod, které se týkají reálných funkcí dvou reálných proměnných. Některé pojmy – jako jsou například diferenciály, implicitně definované funkce, Taylorovy polynomy pro funkce dvou proměnných – jsem záměrně vynechal, protože tyto partie zpravidla nejsou součástí výkladu matematiky na vysokých školách, pro které je Matematické praktikum určeno.

Pátá kapitola obsahuje rovněž velmi stručný přehled základních integračních metod (integrační metodu per partes, substituční metodu), velmi zúženou podkapitulu o integraci speciálního typu racionální funkce, ilustraci Newtonovy definice určitého integrálu a poznámku o nevlastních integrálech.

Šestá kapitola obsahuje jednoduché příklady pro ilustraci základních pojmů nekonečných číselných řad, jako je užití kritérií konvergence a základních pojmů týkajících se alternujících, absolutně konvergentních a mocninných řad.

Sedmá kapitola obsahuje základní početní postupy pro řešení základních typů lineárních diferenciálních rovnic prvního a druhého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou.

Pro větší komfort studentů je na začátku každé kapitoly a všech podkapitol uveden stručný přehled všech základních definic a vět, na které se při řešení úloh odvolávám.

Tato publikace by mohla být užitečná na školách, kde hodinová dotace přednášek a cvičení je více či méně nedostatečná. Vedoucí cvičení by nemuseli ztrácet čas se zcela jednoduchými početními postupy, které jsou v této publikaci uvedeny.

Je mou milou povinností poděkovat všem kolegům, kteří přispěli ke zkvalitnění této publikace. Můj dík patří recenzentovi a vědeckému redaktoru této publikace, panu prof. RNDr. Josefu Matušů, DrSc., který několikrát mimořádně pečlivě přečetl celou publikaci a svými připomínkami významně přispěl ke zkvalitnění textu jak po stránce obsahové, tak po stránce formální.

Rovněž můj dík patří paní doc. PhDr. Miladě Šmejcové, CSc. za velmi pečlivou jazykovou korekturu celého textu.

V neposlední řadě patří můj vřelý dík studentovi VŠE v Praze panu Bc. Janu Hnízdilovi za obětavou pomoc při počítačovém zpracování obrázků a vysázení celého textu v L^AT_EXu.

V Praze v srpnu 2010.

Miloš Kaňka